# 表現のテンソル積とPlancherel Formulaについて (群の表現と調和解析)



土川, 真夫

数理解析研究所講究録
368巻 1979年 138-159



# 表現のテンソル積とPlancherel formulaについて

三重大 教育　土川真夫

## 0. 序

$k$をlocally compact, non-discrete, totally disconnected topological fieldとする。$SL_2(k)$のあるseriesの二つのunitary表現$\mathcal{R}_{\pi_1}$, $\mathcal{R}_{\pi_2}$によるtensor積$\mathcal{R}_{\pi_1}\otimes\mathcal{R}_{\pi_2}$の既約分解の公式を与えることを考える。他の色々な群の表現に関する類似の問題は，主としてMackey, Neumark, Pukanszky, Williams, Martin, Repka等により考察されている。特にMartin[1]は$SL_2(k)$の表現のtensor積$\mathcal{R}_{\pi_1}\otimes\mathcal{R}$で，$\mathcal{R}_{\pi_1}$はprincipal，$\mathcal{R}$は任意の既約unitary表現という場合を考察し，分解に表われる表現とその重複度に関する公式を与えている。それにはMackey-AnhのReciprocity Theoremを使うが，例えば$\mathcal{R}_{\pi_1}$, $\mathcal{R}_{\pi_2}$ともに主系列表現のとき，

$$\mathcal{R}_{\pi_1}\otimes\mathcal{R}_{\pi_2}\simeq 4\int_{\pi(-1)=\pi_1\pi_2(-1)}\mathcal{R}_\pi\, d\mu(\pi)\oplus 4c(\pi_1\pi_2)\mathcal{R}_{-1}\oplus$$

$$2\sum_{\tau=\varepsilon,p,\varepsilon p}\sum_{\pm}\sum_{\substack{\pi_\tau\in\hat{C}_\tau,\ \mathrm{ord}.\pi_\tau\neq 2\\ \pi_\tau \mathrm{sgn}_\tau(-1)=\pi_1\pi_2(-1)}}\mathcal{R}^{\pm}_{\pi_\tau}\oplus d(\pi_1\pi_2)\{\mathcal{R}_0^{+,1}\oplus\mathcal{R}_0^{+,2}\oplus\mathcal{R}_0^{-,1}\oplus\mathcal{R}_0^{-,2}\}$$

で与えている。ただし

$$c(\pi_1\pi_2)=\begin{cases}1 & \pi_1\pi_2(-1)=1\\ 0 & \pi_1\pi_2(-1)=-1\end{cases},\quad d(\pi_1\pi_2)=\begin{cases}1 & \pi_1\pi_2(-1)=\pi_\tau^0 \mathrm{sgn}_\tau(-1)\\ 0 & \pi_1\pi_2(-1)\neq\pi_\tau^0 \mathrm{sgn}_\tau(-1)\end{cases}$$

$\pi_\varepsilon^0$は$C_\varepsilon^0$ のorder 2 の指標，$\pi_\varepsilon^0 \mathrm{sgn}_\varepsilon(-1)$は $-1\in(k^\times)^2$のとき $-1$，$-1\notin(k^\times)^2$のとき $+1$ ，$\mathcal{R}_\pi$ はprincipalの，$\mathcal{R}_{-1}$ はspecial，$\mathcal{R}^{\pm}_{\pi_\tau}$はdiscrete seriesの表現で，$\mathcal{R}_0^{+,1}\oplus\mathcal{R}_0^{+,2}$，$\mathcal{R}_0^{-,1}\oplus\mathcal{R}_0^{-,2}$はsplit discrete seriesの表現である。$\{d\mu, \Sigma\}$は$SL_2(k)$のPlancherel measureと同値なmeasureである。

そこで我々はPlancherel公式そのものを使って，$\mathcal{R}_{\pi_1}$, $\mathcal{R}_{\pi_2}$がprincipal又はsupplementary seriesの表現の場合の$\mathcal{R}_{\pi_1}\otimes\mathcal{R}_{\pi_2}$の分解公式をよりexplicitに与えることを試みるものである。

## 1. $k$についてよく知られていること

$k$を上記の位相体，$k^\times$をその乗法群，$O$を整数環，$P$をその極大イデアル，$p$を$P=pO$となる元とする。$k$上の付値を$|\cdot|$とすると，$|p|=q^{-1}=|O/P|^{-1}$である。$\varepsilon$を$k^\times$の中の1

の原始 $q-1$ 乗根とする。このとき $k$ の2次拡大 $k(\sqrt{\tau})$ は $\tau=\varepsilon, p, \varepsilon p$ できまる。$z=x+\sqrt{\tau}y\in k(\sqrt{\tau})$ に対して，$\bar{z}=x-\sqrt{\tau}y$，$S(z)=z+\bar{z}$，$N(z)=z\bar{z}$ とする。$N(k(\sqrt{\tau})^\times)=k_\tau^\times$ とおくと，$k_\tau^\times$ は $k^\times$ の subgroup で

$$k^\times\supset k_\tau^\times\supset(k^\times)^2,\quad [k^\times:k_\tau^\times]=[k_\tau^\times:(k^\times)^2]=2$$

である。また $k^\times/(k^\times)^2$ の代表系は $\{1, \varepsilon, p, \varepsilon p\}$ である。また $k^\times$ の符号 $\mathrm{sgn}_\tau$ は次の様に定義される。

$$\mathrm{sgn}_\tau x=\begin{cases}1 & x\in k_\tau^\times\\ -1 & x\in k^\times-k_\tau^\times\end{cases}$$

$\chi$ を $k$ の(加法)指標で $\chi(x)=1\Leftrightarrow x\in O$ となるものとする。また $\pi$ を $k^\times$ の(乗法)指標とする。$k^\times\simeq\mathbb{Z}\times O^\times$ ($O^\times=O-\mathfrak{p}$) だから

$$\pi(x)=|x|^\alpha\,\pi^\times(x)$$

と表わすことが出来る。ただし，$\pi^\times$ は $O^\times$ の指標を $\pi^\times(p)=1$ によって $k^\times$ に拡張した指標である。$\pi^\times\equiv 1$ のとき，$\pi$ を unramified，$\pi^\times(x)=1\Leftrightarrow x\in 1+\mathfrak{p}^h$ ($h$：正整数) のとき，$\pi$ を ramified of degree $h$ という。$\pi$ が unitary である必要十分条件は $\mathcal{R}e(\alpha)=0$ である。$\alpha=i\lambda$，$\frac{-\pi}{\log q}\leqq\lambda\leqq\frac{\pi}{\log q}$ としてよい。$k^\times$ のユニタリ指標全体を $\widehat{k^\times}$ とする。

$\mathcal{S}$ を $k$ 上の complex-valued, compactly supported, locally constant function 全体とし，$\mathcal{S}^\times$ を $k^\times$ 上全ての

な函数全体とする。$\hat{S}$を$S$のFourier変換による像とすれば$\hat{S}=S$，$\widehat{S^\times}$を$S^\times$のFourier変換(乗法のFourier変換=Mellin変換)とする。

$k$上のGamma函数は次のように定義される：

$$\Gamma(\pi)=P\text{-}\int_{k^\times}\pi(x)\chi(x)d^\times x=\lim_{n\to\infty}\int_{q^{-n}\leqq|x|\leqq q^n}\pi(x)\chi(x)d^\times x$$

$\pi$がunramifiedのとき，つまり$\pi(x)=|x|^\alpha$のとき，積分は$Re(\alpha)>0$のところで実際に収束し，その値は

$$\Gamma(|\cdot|^\alpha)=\frac{1-q^{\alpha-1}}{1-q^{-\alpha}}$$

であり，そこで$\alpha$につきholomorphic，$Re(\alpha)\leqq 0$へはmeromorphicに接続される。実際で$\alpha=0$でsingular point，$\alpha=1$はzeropointである。$\pi$がunramifiedのときつねに積分は収束し，簡単な値をとり，全域でholomorphicである。

## 2. $G=SL_2(k)$の表現

Gの部分群を定義する。

$$D=\left\{d(a)=\begin{pmatrix}a^{-1}&0\\0&a\end{pmatrix}\ \middle|\ a\in k^\times\right\}$$

$$N=\left\{n(y)=\begin{pmatrix}1&y\\0&1\end{pmatrix}\ \middle|\ y\in k\right\},\quad L=\left\{l(x)=\begin{pmatrix}1&0\\x&1\end{pmatrix}\ \middle|\ x\in k\right\}$$

このとき，$\forall g=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}$，$\delta\neq0$に対してuniqueな分解があ

る。
$$g=\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}=d[g]n[g]l[g]$$

$k^\times$の指標$\pi$に対して，$\pi(dn)=\pi(a)$により$B=DN$の指標が定義され，誘導表現$\mathfrak{R}_\pi=\mathrm{Ind}_B^G\pi$が与えられる。具体的には

$$\mathfrak{S}_\pi=\mathrm{l.s.}\{\varphi(x),\ \pi\rho^{-\frac{1}{2}}(x)\psi(x)\mid\varphi,\psi\in\mathfrak{S}\}$$

($\rho(x)=|x|^2$)とすると，$\varphi\in\mathfrak{S}_\pi$に対して

$$T_g^\pi\varphi(x)=\pi\rho^{-\frac{1}{2}}(\beta x+\delta)\varphi\left(\frac{\alpha x+\gamma}{\beta x+\delta}\right)$$

又は単に
$$T_g^\pi\varphi(l)=\pi\rho^{-\frac{1}{2}}(a[lg])\varphi(l[lg])$$

で定義されるoperatorについて
$$\mathfrak{R}_\pi=\{T_g^\pi,\ \mathfrak{S}_\pi\}$$

である。

$\pi$がunitaryのときは，$\mathfrak{R}_\pi$はprincipal seriesの表現で$\pi=\mathrm{sgn}_\tau$，$\tau=\varepsilon, p, \varepsilon p$でないとき既約，$\pi=\mathrm{sgn}_\tau$のとき，二つの既約表現にsplitする。

$\pi(x)=|x|^\alpha$，$-1<\alpha<0$のとき，$\mathfrak{R}_\pi$はsupplementary seriesの表現である。これは内積

$$\langle\varphi_1,\varphi_2\rangle=\frac{1}{\Gamma(\pi^{-1})}\int\pi^{-1}\rho^{-\frac{1}{2}}(x_1-x_2)\varphi_1(x_1)\overline{\varphi_2(x_2)}dx_1dx_2$$

に関する既約unitary表現である。

supplementary series表現で $\alpha \to -1$ としたときspecial表現が表われる。実際には

$$\mathcal{S}^0_{-1} = \{\varphi \in \mathcal{S}_\pi,\ \pi(x) = |x|^{-1},\ \int \varphi(x)\,dx = 0\}$$

に対して定義される表現 $R_{-1} = \{T^\pi, \mathcal{S}^0_{-1}\}$ で内積

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \int \ln|x_1 - x_2|\, \varphi(x_1)\overline{\varphi(x_2)}\, dx_1 dx_2$$

に関するunitary表現である。

これらの表現のもう一つの表し方として本稿でも利用する $\chi$-realizationがある。それは今述べた表現のFourier変換として実現されるものである。それは次の形で与えられる。

$\hat{\mathcal{S}}_\pi$ 又は $\hat{\mathcal{S}}^0_{-1} \ni \varphi(u)$ に対して

$$\hat{T}^\pi_g \varphi(u) = \pi(a)|a|\varphi(a^2 u) \qquad g = d(a)$$

$$\hat{T}^\pi_g \varphi(u) = \chi(xu)\varphi(u) \qquad g = l(x)$$

$$\hat{T}^\pi_g \varphi(u) = \int J_\pi(u,v)\varphi(v)\,dv \qquad g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ただし $J_\pi(u,v)$ はBessel核で

$$J_\pi(u,v) = \text{P-}\int_{k^\times} \chi(-(ut + vt^{-1}))\pi(t)\,d^\times t$$

である。

Gのdiscrete seriesの表現は、Weil表現の既約成分として与えられる。具体的には

$$(\mathcal{S}^\times)^+_\tau = \mathcal{S}^\times|_{k^\times_\tau} \ni \varphi(u)$$

7

とすると

$$T_g^{\pi_\tau +}\varphi(u)=\pi_\tau\,\mathrm{sgn}_\tau(a)\,|a|\,\varphi(a^2u) \qquad g=d(a)$$

$$T_g^{\pi_\tau +}\varphi(u)=\chi(xu)\,\varphi(u) \qquad g=l(x)$$

$$T_g^{\pi_\tau +}\varphi(u)=a_\tau\, s_\tau\int J_{\pi_\tau}(u.v)\,\varphi(v)\,dv \qquad g=w$$

ただし，$a_\tau=\dfrac{2(1+q^{-1})}{1+|\tau|}$，$s_\tau^{-1}=\displaystyle\int_{k(\sqrt{\tau})}\chi(N(z))\,dz$

$$J_{\pi_\tau}(u.v)=\int_{t\bar{t}=vu^{-1}}\chi(ut+vt^{-1})\,\pi_\tau(t)\,d^\times t$$

$\pi_\tau$ は $C_\tau=\{z\mid N(z)=1\}$ の指標を $k(\sqrt{\tau})$ に拡張したもので，表現は同値なものを除いて，拡張の仕方によらないことが知られている。また $(\mathfrak{H}^\times)^-_\tau=\mathfrak{H}^\times|_{k^\times\setminus k^\times_\tau}$ 上で上と同じ形の operators による表現が構成される。これらが

$$\mathfrak{R}^+_{\pi_\tau}=\{T_g^{\pi_\tau +},(\mathfrak{H}^\times)^+_\tau\},\qquad \mathfrak{R}^-_{\pi_\tau}=\{T_g^{\pi_\tau -},(\mathfrak{H}^\times)^-_\tau\}$$

である。$\pi_\tau\in\hat{C}_\tau$ が order 2 の指標でないとき既約で，order 2 の指標 $\pi^0_\tau$ の場合，$\mathfrak{R}^\pm_{\pi^0_\varepsilon}\simeq\mathfrak{R}^\pm_{\pi^0_p}\simeq\mathfrak{R}^\pm_{\pi^0_{\varepsilon p}}$ で split する。

$$\mathfrak{R}^+_{\pi^0_\varepsilon}=\mathfrak{R}^{+,1}_0\oplus\mathfrak{R}^{+,2}_0,\qquad \mathfrak{R}^-_{\pi^0_\varepsilon}=\mathfrak{R}^{-,1}_0\oplus\mathfrak{R}^{-,2}_0$$

と書く。

## 3. $SL_2(k)$ の表現の tensor 積

我々が取扱う表現の tensor 積 $\mathfrak{R}_{\pi_1}\otimes\mathfrak{R}_{\pi_2}=\{T^{\pi_1}\otimes T^{\pi_2},\ \mathfrak{H}_{\pi_1}\otimes\mathfrak{H}_{\pi_2}\}$ は次の三つの場合である。

(I) $\mathfrak{R}_{\pi_1},\mathfrak{R}_{\pi_2}$ が principal series の表現であるとき，

8

tensor積表現は $\varphi(x_1, x_2) \in \mathcal{S}_{\pi_1} \otimes \mathcal{S}_{\pi_2}$ に対して

$$(T_g^{\pi_1} \otimes T_g^{\pi_2})\varphi(x_1, x_2) = \pi_1\rho^{-\frac{1}{2}}(\beta x_1 + \delta)\pi_2\rho^{-\frac{1}{2}}(\beta x_2 + \delta) \times \varphi\left(\frac{\alpha x_1 + \gamma}{\beta x_1 + \delta}, \frac{\alpha x_2 + \gamma}{\beta x_2 + \delta}\right)$$

で，内積

$$B(\varphi_1, \varphi_2) = \int \varphi_1(x_1, x_2)\overline{\varphi_2(x_1, x_2)}\, dx_1 dx_2$$

に関する unitary 表現である。

(II) $\mathcal{R}_{\pi_1}$ が supplementary series，$\mathcal{R}_{\pi_2}$ が principal series表現の場合，operator は前と同じ，内積

$$B(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{1}{\Gamma(\pi_1^{-1})}\int \pi_1^{-1}\rho^{-\frac{1}{2}}(x_1 - x_1')\varphi_1(x_1, x_2)\overline{\varphi_2(x_1', x_2)}\, dx_1 dx_1' dx_2$$

に関する unitary表現。

(III) $\mathcal{R}_{\pi_1}$，$\mathcal{R}_{\pi_2}$ がともに supplementary series表現で，内積は

$$B(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{1}{\Gamma(\pi_1^{-1})\Gamma(\pi_2^{-1})}\int \pi_1^{-1}\rho^{-\frac{1}{2}}(x_1 - x_1')\pi_2^{-1}\rho^{-\frac{1}{2}}(x_2 - x_2') \varphi_1(x_1, x_2)\overline{\varphi_2(x_1', x_2')}\, dx_1 dx_1' dx_2 dx_2'$$

で与えられる。

以下それぞれの tensor 積を(I),(II),(III) の case と呼ぶ。

$\mathcal{S}(G)$ を $G$ 上の complex-valued，compactly supported，locally constant function全体とします。このとき，次の写像 $U: \mathcal{S}(G) \longrightarrow \mathcal{S}_{\pi_1} \otimes \mathcal{S}_{\pi_2}$ が定義される。

$$\mathcal{S}(G) \ni f(g) \longrightarrow \pi_2^{-1}\rho^{-\frac{1}{2}}(d[wn])\int \pi_1^{-1}\pi_2(d)f(d(a)n\ell)\, d^\times a$$

$$= \varphi(\ell, \ell[wn]\ell)$$
$$= \varphi(x, y^{-1}+x) \in \mathcal{S}_{\pi_1} \otimes \mathcal{S}_{\pi_2}$$

ただし $g = d(a)n(y)\ell(x)$ である。ここで

$$\mathcal{H}_{\pi_1,\pi_2} = \{\varphi \mid \varphi \in \mathcal{S}_{\pi_1} \otimes \mathcal{S}_{\pi_2}, \exists \varepsilon > 0$$
$$|x_1 - x_2| = 0 \text{ なら } \varphi(x_1, x_2) = 0\}$$

また右正則表現を $\tau_g$ とする。即ち $\tau_g f(\cdot) = f(\cdot g)$。
このとき次の命題が成立する。

<u>prop. 1</u> $U : C_c^\infty(G) \ni f \longmapsto \varphi \in \mathcal{H}_{\pi_1,\pi_2}$
は G-morphism で surjective continuous である。
i.e. $U(\tau_g f) = T_g^{\pi_1} \otimes T_g^{\pi_2} \varphi$
and $f_n \to f_0$ のとき $\varphi_n \to \varphi_0$

今 $B(\varphi_1, \varphi_2)$ を (I), (II), (III) の case の tensor 積 の連続な双線型形式とする。そのとき prop 1 と等式

$$B(\varphi_1, \varphi_2) = B(Uf_1, Uf_2) = B'(f_1, f_2)$$

より $\mathcal{S}(G)$ 上の連続双線型形式 $B'$ が定義される。核超関数 $h'$ を使って書くと

$$B'(f_1, f_2) = \int h'(g_1, g_2) f_1(g_1) \overline{f_2(g_2)}\, dg_1 dg_2$$

一方 $B(T_g^{\pi_1} \otimes T_g^{\pi_1} \varphi_1, T_g^{\pi_1} \otimes T_g^{\pi_2} \varphi_2) = B(\varphi_1, \varphi_2)$
より $h'(g_1 g, g_2 g) = h(g_1, g_2)$
核超関数の理論から

$$h'(g_1, g_2) = h(g, g_2^{-1})$$

となる $h \in \mathcal{S}(G)$ が存在する。したがって

$$B(\varphi_1, \varphi_2) = \int h(gg_2^{-1}) f_1(g_1) f_2(g_2) dg = \int h(g) f'(g) dg$$

where $f(g) = \int f_1(gg_1) \overline{f_2(g_1)} dg_1 = f_1 * f_2^*(g)$, $f^*(g) = \overline{f(g^{-1})}$

(I), (II), (III) の双線型形式に対応する $h(g)$ は具体的に求められる。

Prop. 2 (I), (II), (III) に対応する超関数 $h(g)$ は次の通りである。$g = d(a)n(y)l(x)$ に対して ($\Delta$ は $\delta$-関数)

(I) $h(g) = \pi_1^{-1}\pi_2(a)\Delta(y)\Delta(x)$

(II) $h(g) = \dfrac{1}{\Gamma(\pi_1^{-1})} \pi_1^{-1}\pi_2(a)\Delta(y)\pi_1^{-1}\rho^{-\frac{1}{2}}(x)$

(III) $h(g) = \dfrac{1}{\Gamma(\pi_1^{-1})\Gamma(\pi_2^{-1})} \pi_1^{-1}\pi_2(a)\pi_2^{-1}\rho^{-\frac{1}{2}}(y)\ \pi_1^{-1}\rho^{-\frac{1}{2}}(x)$

## 4. Plancherel formula と Plancherel transform

2節ではGの表現を与えた。principal series の表現およびspecial表現の$\chi$-実現や discrete series の表現の作用素を改めて積分核 $K_\pi(g|u,v)$ で書くことにする。たとえば

$$\hat{T}^\pi_d\varphi(u) = \pi\rho^{\frac{1}{2}}(a)\varphi(a^2u)$$
$$= \int \pi\rho^{\frac{1}{2}}(a)\Delta(v - a^2u)\varphi(v)dv = \int K_\pi(d|u,v)\varphi(v)dv$$

という具合である。

$\hat{G}_c = \widehat{k^\times}$, $\hat{G}_s = \{\pi_0(x) = |x|^{-1}\}$, $\hat{G}_d = \bigcup_{\tau = \varepsilon, p, \varepsilon p} \hat{C}_\tau$ (ただし order 2の指標は除く), $\hat{G}_{sd} = \{\pi_\varepsilon^0 : C_\tau$ 上の order 2の指標$\}$
$\hat{G} = \hat{G}_c \cup \hat{G}_s \cup \hat{G}_d \cup \hat{G}_{sd}$ とする。
$\hat{G} \ni \hat{g}$ に対して

$$K_{\hat{g}}(f|u.v) = \int f(g) K_{\hat{g}}(g|u,v)\,dg$$

を $f(g)$ のPlancherel 変換という。$K_{\hat{g}}(f|u.v)$ を特徴づける ための次の関数空間を構成する。

Dは $k^\times \times k^\times \times \hat{G}$ 上の次の条件をみたす関数 $F(u,v,\hat{g})$ 達の作る位相線型空間である。(位相については省略)

(1)(i) $\pi \in \hat{G}_c$ に対して

$$b(u.v,\pi) = \Gamma(\pi)\pi^{-1}(u),\quad c(u.v,\pi) = \Gamma(\pi^{-1})\pi(v)$$

とおくとき $F(u.v,\hat{g})$ は $k^\times \times k^\times \times \hat{G}_c$ 上で

$$F_1,\ bF_2,\ cF_3,\ bcF_4\quad ;\ F_1, F_2, F_3, F_4 \in \mathcal{S}\otimes\mathcal{S}\otimes\widetilde{\mathcal{S}^\times}$$

の形の関数の finite linear combination で書ける。

(ii) $F(u.v,\pi^{-1}) = F(u.v,\pi)\pi(u)\pi(v)^{-1}$

(2) $\pi_0 \in \hat{G}_s$ に対して, $F(u.v,\pi_0)$ は

$$F_1,\ bF_2\quad ;\ F_1(u.v.\pi_0) \in \mathcal{S}^\times\otimes\mathcal{S}^\times,\ F_2 \in \mathcal{S}\otimes\mathcal{S}^\times$$

(3)(i) $\mathcal{F}(\hat{G}_d)$ を discrete set $\hat{G}_d$ の finite sequence 全体とすると $F(u,v,\hat{g}) \in \mathcal{S}^\times\otimes\mathcal{S}^\times\otimes\mathcal{F}(\hat{G}_\tau)$

(ii) $F(u.v,\pi_\tau^{-1}) = F(u.v,\pi_\tau)\pi_\tau(u)\pi_\tau(v)^{-1}$

(4) $F(u.v,\pi_\varepsilon^0) \in \mathcal{S}^\times\otimes\mathcal{S}^\times$

この空間によってPlancherel変換 $K_{\hat{g}}(f|u,v)$ の特徴づけを行う。

Th.1 (Paley-Wiener型の定理)

$f\in \mathcal{S}(G)$ の Plancherel 変換 $K_{\hat{g}}(f|u,v)$ は $k^\times\times k^\times\times \hat{G}$ 上の関数であって $D$ に属する。

また

$$P:\mathcal{S}(G)\ni f\longmapsto K_{\hat{g}}(f|u,v)\in D$$

は bijection である。

注意 この定理はほぼ正しいと思うが証明は $P$ が surjection であることについて完全に行われていない。そこで以後は

$$\mathcal{S}(G)\hookrightarrow D\ ,\quad P(\mathcal{S}(G))=D_1$$

として議論する。

$$D_2=\{F(u,v,\hat{g})\in D\ ,\ \hat{g}\in\hat{G}_d \text{ のとき } F(u,v,\hat{g})\in \mathcal{S}^\times\otimes\mathcal{S}^\times\otimes\widetilde{\mathcal{S}^\times}\}$$

とおくと $D_2\subset D_1$ であることは証明される。

$G$ 上の Plancherel formula は次の形で与えられる。

$$cf(e)=\int_{\hat{G}_c}\mu(\pi)\,\mathrm{Tr}\,T^\pi(f)\,d\pi+2\,\mathrm{Tr}\,T^{\pi_0}(f)$$
$$+\sum_{\tau=\varepsilon,p,\varepsilon p}\sum_{h=1}^{\infty}\sum_{\pi_\tau\in\hat{C}_\tau,\ \mathrm{cond}\,\pi_\tau=C_\tau^{(h)}}\mu(\pi_\tau)\,\mathrm{Tr}\,T^{\pi_\tau}(f)$$

ただし、$c=\dfrac{2(q+1)}{q^2}$, $\mu(\pi)=\dfrac{q+1}{q^2}\dfrac{1}{|\Gamma(\pi)|^2}$, $\mu(\pi_\tau)=q^{h}\left(\dfrac{1+|\tau|^{-1}}{2}\right)$

cond $\pi_\tau$ は $\pi_\tau$ の conductor。

ここで $T^\pi(f)$ 等は f の Plancherel transform に等しい。

$$T\hat{g}(f) = \int f(g) K_{\hat{g}}(g|u,v)\,dg = K_g(f|u,v)$$

Prop. 3 次の命題が成り立つ。

(1) $g_0 f(g) = f(g_0 g)$ とおくとき

$$K_{\hat{g}}(g_0 f|u,v) = \int K_{\hat{g}}(g_0|u,w) K_{\hat{g}}(f|w,v)\,dv$$

(2) $f'(g) = f(g^{-1})$, $K'_{\hat{g}}(f|u,v) = K_{\hat{g}}(f|-u,-v)$ とするとき

$$K_{\hat{g}}(f'|u,v) = K'_{\hat{g}}(f|v,u)\frac{\pi(v)}{\pi(u)}$$

(3) $K_{\hat{g}}(\bar{f}|u,v) = \overline{K'_{\bar{\hat{g}}}(f|v,u)}$

(4) $f^*(g) = \overline{f(g^{-1})}$ とするとき

$$K_{\hat{g}}(f^*|u,v) = \overline{K_{\bar{\hat{g}}}(f|v,u)}\,\frac{\pi(v)}{\pi(u)}$$

この命題と trace に関する一般論から Plancherel 公式は次の形に書き変えられる。

$$c\int f_1(g)\overline{f_2(g)}\,dg = \int_{\hat{G}_\tau} \mu(\pi) K_\pi(f_1|u,v)\overline{K_\pi(f_2|u,v)}\,du\,dv\,d\pi$$

$$+2\int K_{\pi_0}(f_1|u,v)\overline{K_{\pi_0}(f_2|u,v)}\,\frac{\pi(u)}{\pi(v)}\,du\,dv$$

$$+\sum_{\tau=\varepsilon,p,\varepsilon p}\sum_{h=1}^{\infty}\sum_{\pi_\tau\in\hat{C}_\tau,\ \mathrm{cond}\,\pi_\tau = C_\tau^{(h)}} \mu(\pi_\tau)\int K_{\pi_\tau}(f_1|u,v)\overline{K_{\pi_\tau}(f_2|u,v)}\,du\,dv$$

$h(g) \in \mathcal{S}'(G)$ とするとき, Plancherel 公式を使って,

$h$ の Plancherel 変換 $K_{\hat{g}}(h|u,v)\in D_1$ を定義することが出来る。とくに前節で述べたことと組合せると

$$B(\varphi_1,\varphi_2)=\int h(g)f'(g)dg \qquad (\text{☆})$$

$$=\int_{\hat{G}_c}\mu(\pi)K_\pi(h|u,v)K_\pi(f_1'|w,u)K_\pi(f_2'|w,v)\,du\,dv\,dw\,d\pi$$

$$+2\int K_{\pi_0}(h|u,v)K_\pi(f_1'|w,u)\overline{K_\pi(f_2'|w,v)}\frac{\pi(w)}{\pi(v)}du\,dv$$

$$+\sum_\tau\sum_h\sum_{\pi_\tau}\mu(\pi_\tau)\int K_{\pi_\tau}(h|u,v)K_{\pi_\tau}(f_1'|w,u)K_{\pi_\tau}(f_2'|w,v)\,du\,dv\,dw$$

前節では $h$ を具体的に与えた。

(I) $h(g)=\pi_1^{-1}\pi_2(a)\Delta(y)\Delta(x)$

(II) $h(g)=\dfrac{1}{\Gamma(\pi_1^{-1})}\pi_1^{-1}\pi_2(a)\Delta(y)\pi_1^{-1}\rho^{-\frac{1}{2}}(x)$

(III) $h(g)=\dfrac{1}{\Gamma(\pi_1^{-1})\Gamma(\pi_2^{-1})}\pi_1^{-1}\pi_2(a)\pi_2^{-1}\rho^{-\frac{1}{2}}(y)\pi_1^{-1}\rho^{-\frac{1}{2}}(x)$

ただし $g=d(a)n(y)\ell(x)=\begin{pmatrix}a^{-1}&0\\0&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&y\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\x&1\end{pmatrix}$

これら各々の超関数に対する Plancherel 変換 $K_{\hat{g}}(h|u,v)$ を求めるのが以後の問題である。

## 5. $K_{\hat{g}}(h|u,v)$ が non-trivial であるための必要条件

$f\in\mathcal{S}(G)$ に対して $\alpha f(g)=f(\alpha^{-1}g)$ をとる。prop. 3 より,

$$K_\pi(\alpha f|u,v)=\int K_\pi(\alpha|u,u_1)K_\pi(f|u_1,v)du$$

$$= \pi\rho^{\frac{1}{2}}(a)K_\pi(f|a^2u,v), \quad \pi\in\hat{G}_c, \hat{G}_s$$

$h\in\mathcal{S}'(G)$であってもこの等式は成り立つ。

$$K_\pi(ah|u.v) = \pi\rho^{-\frac{1}{2}}(a)K_\pi(h|a^2u.v) \quad \cdots\cdots(1)$$

一方 $h(g)$ が(I), (II), (III)のいずれであっても

$$ah(g) = \pi_1^{-1}\pi_2(a)h(g)$$

したがって

$$K_\pi(ah|u.v) = \pi_1^{-1}\pi_2(a)K_\pi(h|u.v) \quad \cdots\cdots(2)$$

(1), (2)を組合せると

$$K_\pi(h|a^2u,v) = \pi_1^{-1}\pi_2\pi^{-1}\rho^{-\frac{1}{2}}(a)K_\pi(h|u.v)$$

とくに $a=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ として両辺を比べると

$$\pi_1^{-1}\pi_2\pi^{-1}(-1) = \pi_1\pi_2\pi(-1) = 1$$

でなければ $K_\pi(h|u.v) = 0$

$\pi_\tau\in\hat{G}_d, \hat{G}_{sd}$ の場合も同じ扱いをすれば

$$\pi_1^{-1}\pi_2\pi^{-1}\mathrm{sgn}_\tau(-1) = \pi_1\pi_2\pi\,\mathrm{sgn}_\tau(-1) = 1$$

でなければ $K_{\pi_\tau}(h|u.v) = 0$ であることがわかる。

<u>Th. 2</u> $\pi_1\pi_2\pi(-1) = \pi_1\pi_2\pi_\tau\mathrm{sgn}_\tau(-1) \neq 1$ となる $a, e, \pi, \pi_\tau$ と; $a, e, (u, v)\in k^\times\times k^\times$ に対して

$$K_\pi(h|u.v) = K_{\pi_\tau}(h|u.v) = 0$$

注 このThはMartinの公式の積分範囲や, $\Sigma$の範囲に対応する。

またこの条件から

$$(\pi_1\pi_2^{-1}\pi^{-1}\rho^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}(a) = (\pi_1\pi_2^{-1}\pi^{-}\rho^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\rho^{-\frac{1}{2}}(a)$$

$$(\pi_1\pi_2^{-1}\pi_\tau^{-1}\mathrm{sgn}_\tau\,\rho^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}(a) = (\pi_1\pi_2^{-1}\pi_\tau^{-1}\mathrm{sgn}_\tau\,\rho^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\rho^{-\frac{1}{2}}(a)$$

ととることが出来る。

## 6. 分解公式（(I), (III) の場合）

いよいよ分解公式を与えることを考えよう。

$$h(g) = h(dn\ell) = \pi_1^{-1}\pi_2(a)\Delta(y)\Delta(x)$$

Lemma 1　$\pi \in \hat{G}_c$, $\hat{G}_s$ のとき

$$K_\pi(h|u.v) = \int \pi_1^{-1}\pi_2(a)K_\pi(d|u.v)\,d^\times a$$

$$= \begin{cases} 2(\pi_1\pi_2^{-1}\pi^{-1}\rho^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\rho^{-\frac{1}{2}}(u)\,(\pi_1^{-1}\pi_2\pi\rho^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\rho^{-\frac{1}{2}}(v), & uv^{-1}\in(k^\times)^2 \\ 0 & , uv^{-1}\notin(k^\times)^2 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{s=1,\varepsilon,p,\varepsilon p}(\pi_1\pi_2^{-1}\pi^{-1}\rho^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\mathrm{sgn}_s\,\rho^{-\frac{1}{2}}(u)\,(\pi_1^{-1}\pi_2\pi\rho^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\mathrm{sgn}_s\,\rho^{-\frac{1}{2}}(v)$$

Lemma 2　$\pi_\tau \in \hat{G}_d$ とする。

$u.v \in k_\tau^\times$ なら

$$K_{\pi_\tau}(h|u.v) = K^+_{\pi_\tau}(h|u.v)$$

$$= (\pi_1\pi_2^{-1}\pi_\tau^{-1}\mathrm{sgn}_\tau\rho^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\mu^+\rho^{-\frac{1}{2}}(u)\,(\pi_1^{-1}\pi_2\pi_\tau\,\mathrm{sgn}_\tau\,\rho^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\mu^+\rho^{-\frac{1}{2}}(v)$$

$$+ (\pi_1\pi_2^{-1}\pi_\tau^{-1}\mathrm{sgn}_\tau\rho^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\mu^-\rho^{-\frac{1}{2}}(u)\,(\pi_1^{-1}\pi_2\pi_\tau\,\mathrm{sgn}_\tau\,\rho^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\mu^-\rho^{-\frac{1}{2}}(v)$$

ただし　$\mu^+(x) \equiv 1 \quad x\in k^\times_\tau$

$$\mu^-(x) = 1 \quad x\in(k^\times)^2, \quad -1 \quad x\in k_\tau^\times\setminus(k^\times)^2$$

また $u, v \in k^\times \setminus k_\tau^\times$ のとき

$$K_{\pi_\tau}(h|u,v) = K_{\pi_\tau}^{-}(h|u,v)$$

$$= \sum_{\pm} (\pi_1\pi_2^{-1}\pi_\tau^{-1}\mathrm{sgn}_\tau \rho^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \nu^{\pm} \rho^{-\frac{1}{2}}(u)\, (\pi_1^{-1}\pi_2\pi_\tau \mathrm{sgn}_\tau \rho^{\frac{1}{2}})\nu^{\pm}\rho^{-\frac{1}{2}}(v)$$

$\nu^{+} \equiv 1 \quad x \in k^\times \setminus k_\tau^\times$

$\nu^{-} = \pm 1 \quad k^\times \setminus k_\tau^\times$ の二つの coset の上で一

では 1, 他では $-1$ の値をとる。

$$\Phi_S(\omega|\pi) = \int_k (\pi_1\pi_2^{-1}\pi^{-1}\rho^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \mathrm{sgn}_S \rho^{-\frac{1}{2}}(u) K_\pi(f'|\omega,u)\,du$$

$$\pi \in \hat{G}_d,\ \hat{G}_S$$

$$\Psi_\pm(\omega|\pi_\tau+) = \int_{k_\tau^\times} (\pi_1\pi_2^{-1}\pi_\tau^{-1}\mathrm{sgn}_\tau \rho^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \mu^{\pm}\rho^{\frac{1}{2}}(u)\, K_{\pi_\tau}^{+}(f'|\omega,u)\,du$$

$$\Psi_\pm(\omega|\pi_\tau-) = \int_{k^\times\setminus k_\tau^\times} (\pi_1\pi_2^{-1}\pi_\tau^{-1}\mathrm{sgn}_\tau \rho^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \nu^{\pm}\rho^{\frac{1}{2}}(u)\, K_{\pi_\tau}^{-}(f'|\omega,u)\,du$$

とおく。

prop. 4

(1) $\Phi_S(\omega|\pi)$, $\Phi_S(\omega|\pi_0)$, $\Psi_\pm(\omega|\pi_\tau+)$, $\Psi_\pm(\omega|\pi_\tau-)$

の右辺の積分は収束する。また

$\Phi_S(\omega|\pi) \in \hat{\mathcal{S}}_\pi \otimes \tilde{\mathcal{S}}^\times$, $\Phi(\omega|\pi_0) \in \hat{\mathcal{S}}_{-1}$

$\Psi_\pm(\omega|\pi_\tau+)$, $\Psi_\pm(\omega|\pi_\tau-) \in \mathcal{S}^\times \otimes \mathfrak{F}(\hat{G}_d \cup \hat{G}_{sd})$

(2) $\{\Phi_S(\omega|\pi), \Phi_S(\omega|\pi_0), \Psi_\pm(\omega|\pi_\tau+), \Psi_\pm(\omega|\pi_\tau-)\} = \Phi(\omega|\hat{g}$

$, S, \pm, +, -\}$

とおくと写像 $f \longmapsto \Phi$ と $f \longmapsto \varphi(x_1, x_2) \in \mathcal{H}_{\pi_1,\pi_2}$ の kernel は一致する。したがって $\mathcal{H}_{\pi_1,\pi_2} \ni \varphi \longmapsto \Phi$ は同型で，しかも G-同型である。すなわち

$$(T_g^{\pi_1} \otimes T_g^{\pi_2} \varphi)(x_1, x_2) \longmapsto \int K_{\hat{g}}(g|w,u)\,\Phi(u|\hat{g},\cdot)\,du$$

(3) $\Phi_1(\omega|\pi)$, $\Phi_\varepsilon(\omega|\pi)$, $\Phi_p(\omega|\pi)$, $\Phi_{\varepsilon p}(\omega|\pi)$, $\pi \in \hat{G}_d, \hat{G}_s$ とすると，同じ表現を受けるが，4つの関数は vector として 1次独立である。$\Phi_+(\omega|\pi_\tau+)$, $\Phi_-(\omega|\pi_\tau+)$ および $\Phi_+(\omega|\pi_\tau-)$ $\Phi_-(\omega|\pi_\tau-)$ についても同じ。 以上。

このprop. を5節等式(☆)に代入して分解公式を得る。

<u>Th. 3</u> $\mathcal{R}_{\pi_i} = \{T^{\pi_i}, \mathcal{S}_{\pi_i}\}$, $\pi_1, \pi_2 \in \hat{G}_c$ のとき，テンソル積 $\mathcal{R}_{\pi_1} \otimes \mathcal{R}_{\pi_2}$ の分解は次の公式で与えられる。

$\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{H}_{\pi_1,\pi_2}$

$$c\int \varphi^1(x_1,x_2)\overline{\varphi^2(x_1,x_2)}\,dx$$
$$= \int_{\hat{G}_c,\ \pi_1\pi_2\pi(-1)=1} \mu(\pi)\left(\frac{1}{2}\sum_s \int \Phi_s^1(\omega|\pi)\overline{\Phi_s^2(\omega|\pi)}\,d\omega\right)d\pi$$
$$+ \frac{1}{2}c(\pi_1\pi_2)\sum_s \int \Phi_s^1(\omega|\pi_0)\overline{\Phi_s^2(\omega|\pi_0)}\,|\omega|^{-1}d\omega$$
$$+ \sum_\tau \sum_{h=1} \sum_{\substack{\pi_\tau \\ \pi_1\pi_2\pi_\tau \mathrm{sgn}_\tau(-1)=1}} \mu(\pi_\tau)\left\{\sum_\pm \int \Psi_\pm^1(\omega|\pi_\tau+)\overline{\Psi_\pm^2(\omega|\pi_\tau+)}\,d\omega\right.$$
$$\left. + \sum_\pm \int \Psi_\pm^1(\omega|\pi_\tau-)\overline{\Psi_\pm^2(\omega|\pi_\tau-)}\,d\omega\right\}$$ 」

$\pi_\varepsilon^0$ を order 2 の $C_\varepsilon$ の指標し，$\pi_1\pi_2(-1) = \pi_\varepsilon^0 \mathrm{sgn}_\varepsilon(-1)$ とみ

なるとき，上の公式にsplit discrete seriesは表われる。

それは $\Phi_\pm(\omega|\pi_\varepsilon^0+) = \eta_1(\omega|\pi_\varepsilon^0) \pm \eta_\varepsilon(\omega|\pi_\varepsilon^0)$

$\Phi_\pm(\omega|\pi_\varepsilon^0-) = \eta_p(\omega|\pi_\varepsilon^0) \pm \eta_{\varepsilon p}(\omega|\pi_\varepsilon^0)$

ただし $\eta_\tau(\omega|\pi_\varepsilon^0)$ は $\tau(k^\times)^2$ 以外のところでは0の函数である。さらに

$$\sum_\pm \left\{ \int \Phi_\pm^1(\omega|\pi_\varepsilon^0+)\overline{\Phi_\pm^2(\omega|\pi_\varepsilon^0+)}\,d\omega + \int \Phi_\pm^1(\omega|\pi_\varepsilon^0-)\overline{\Phi_\pm^1(\omega|\pi_\varepsilon^0-)}\,d\omega \right.$$

$$= 2\sum_s \int \eta_s^1(\omega|\pi_\varepsilon^0)\overline{\eta_s^2(\omega|\pi_\varepsilon^0)}\,d\omega$$

となる。以上でMartinの公式に対応するよりexplicitな公式が得られたわけである。

(II)の場合はほぼ同様な計算で，証明として表わされる形は全く変らない。ただ $\pi_2(-1)=1$ という条件がつけ加わるのみである。

Th. 4 省略

## 7. 分解公式，(III)の場合

$h(g)=\pi_1^{-1}\pi_2(a)\pi_2^{-1}\rho^{-\frac{1}{2}}(y)\pi_1\rho^{\frac{1}{2}}(x)$，$\pi_1(x)=|x|^{\lambda_1}$，$\pi_2(x)=|x|^{\lambda_2}$

$-1<\lambda_1, \lambda_2<0$ に対しては $K_g(h|u,v)$ は Γ-函数の因数をもつ。しかし積分の収束に関する条件から $-1<\lambda_1+\lambda_2<0$ とその他の場合に分けて論ぜられる。

結果だけを述べることにする。

<u>Th. 5</u> $\mathfrak{R}_{\pi_i}=\{T^{\pi_i}, \delta_{\pi_i}\}$ $\pi_1(x)=|x|^{\lambda_1}, \pi_2(x)=|x|^{\lambda_2}$, $-1<\lambda_1$, $\lambda_2<0$, $-1<\lambda_1+\lambda_2<0$ とするとき，テンソル積 $\mathfrak{R}_{\pi_1}\otimes\mathfrak{R}_{\pi_2}$ の分解は次の公式で与えられる。 $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{H}_{\pi_1,\pi_2}$

$$c\int \pi_1^{-1}\rho^{-\frac{1}{2}}(x_1-x_1')\,\pi_2^{-1}\rho^{-\frac{1}{2}}(x_2-x_2')\,\varphi_1(x_1,x_2)\,\overline{\varphi_2(x_1',x_2')}\,dx_1dx_1'dx_2dx_2'$$

$$=\int_{\hat{G}_c,\ \pi(-1)=1}\mu(\pi)\Big(\frac{1}{2}\sum_{s=1,\varepsilon,\rho,\varepsilon\rho}\Pi_s(\pi_1,\pi_2,\pi)\int\Phi_s^1(\omega|\pi)\overline{\Phi_s^2(\omega|\pi)}\Big)\,d\omega\, d\pi$$

$$+\frac{1}{2}\sum_s \Pi_s(\pi_1,\pi_2,\pi_0)\int\Phi_s^1(\omega|\pi_0)\overline{\Phi_s^1(\omega|\pi_0)}\,|\omega|^{-1}d\omega$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\tau}\sum_{h}\sum_{\substack{\pi_\tau \\ \pi_\tau\,\mathrm{sgn}_\tau(-1)=1}}\Big\{\sum_{\pm}\Pi_\tau(\pi_1,\pi_2,\pi_\tau,\pm)\int\Phi_\pm^1(\omega|\pi_\tau+)\overline{\Phi_\pm^2(\omega|\pi_\tau+)}\,d\omega\Big\}$$

$$+\sum_{\pm}\Pi_\tau(\pi_1,\pi_2,\pi_\tau,\pm)\int\Phi_\pm^1(\omega|\pi_\tau-)\overline{\Phi_\pm^2(\omega|\pi_\tau-)}\,d\omega\Big\}$$

ただし

$$\Pi_s(\pi_1,\pi_2,\pi)=\Gamma((\pi_1^{-1}\pi_2\pi\rho^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\mathrm{sgn}_s)\,\Gamma((\pi_1^{-1}\pi_2\pi^{-1}\rho^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\mathrm{sgn}_s)$$
$$\times\Gamma((\pi_1\pi_2\pi\rho^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\mathrm{sgn}_s)\,\Gamma((\pi_1\pi_2\pi^{-1}\rho^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\mathrm{sgn}_s)$$

$$\Pi_\tau(\pi_1,\pi_2,\pi_\tau,\pm)=\Gamma_\tau(\pi_1^{\pm1}\pi_2^{\mp1}\pi_\tau\,\mathrm{sgn}_\tau)$$
$$\times\Gamma_\tau(\pi_1\pi_2\,\pi_\tau\,\mu^{\pm}\mathrm{sgn}_\tau)$$

$\Gamma_\tau$ は $k(\sqrt{\tau})$ 上の gamma 関数で，$k(\sqrt{\tau})^\times$ の指標 $\pi$ に対して

$$\Gamma_\tau(\pi)=\int_{k(\sqrt{\tau})}\chi(S(z))\,\pi(z)\,dz$$

で定義されるものである。 以上

$-2<\lambda_1+\lambda_2\leqq -1$ の場合は Th の公式の解析接続により求

める。

まず公式の右辺は

$$-1<\lambda_1<0\ ,\ -1<\lambda_2<0$$

の範囲で解析的である。右辺から第1項 $S=1$, $\pi(x)=|x|^{i\lambda}$ の部分をとり出そう。

$$右辺 = \frac{1}{2}\int_{-\pi(\log q)^{-1}}^{\pi(\log q)^{-1}} \mu(\pi)\, \Pi_1(\pi_1, \pi_2, \pi)\left(\int \Phi_1^1(\omega|\pi)\overline{\Phi_1^2(\omega|\pi)}\,d\omega\right)d\lambda$$

$$+ \text{others}$$

others の各部分も上記の範囲で解析的である。が積分で書かれた部分は解析的でない。

$$K(\pi_1, \pi_2) = \frac{1}{2}\int_{-\pi(\log q)^{-1}}^{\pi(\log q)^{-1}} \mu(\pi)\, \Pi_1(\pi_1, \pi_2\ \pi)\left(\int \Phi_1^1(\omega|\pi)\overline{\Phi_1^2(\omega|\pi)}\,d\omega\right)d\lambda$$

$$\pi(x)=|x|^{i\lambda}$$

は $\lambda_1+\lambda_2+1=0$, $\lambda=0$ のところで被積分関数が singular point をもつ。これが問題点をひき起し, $\lambda_1, \lambda_2$ について $\lambda_1+\lambda_2+1\geq 0$ まで解析延長を行ったとき

$$K(\pi_1, \pi_2) = \frac{1}{2}\int \quad d\lambda - \frac{2(1-q^{-1})}{\log q}\tan^{-1}\frac{\pi}{(\log q)(\lambda_1+\lambda_2+1)}$$

$$\times \frac{\Gamma(\pi_2\rho^{\frac{1}{2}})}{\Gamma(\pi_1\rho^{\frac{1}{2}})\Gamma((\pi_1\pi_2\rho^{\frac{1}{2}})^{-1})}\int \frac{\Phi^1(\omega|\pi_1\pi_2\rho^{\frac{1}{2}})\overline{\Phi^2(\omega|\pi_1\pi_2\rho^{\frac{1}{2}})}}{|\omega|^{\lambda_1+\lambda_2+1}}\,d\omega$$

Th. 6 $\mathcal{R}_{\pi_i}=\langle T^{\pi_i}, \mathcal{S}_{\pi_i}\rangle$, $\pi_1(x)=|x|^{\lambda_1}$, $\pi_2(x)=|x|^{\lambda_2}$, $-1<\lambda_1$, $\lambda_2<0$, $-2<\lambda_1+\lambda_2\leqq -1$ とするとき, テンソル積 $\mathcal{R}_{\pi_1}\otimes\mathcal{R}_{\pi_2}$ の分解は次の公式で与えられる。 $\varphi_1, \varphi_2\in\mathcal{H}_{\pi_1,\pi_2}$

$$c\int \pi_1^{-1}\rho^{-\frac{1}{2}}(x_1-x_1')\pi_2^{-1}\rho^{-\frac{1}{2}}(x_2-x_2')\varphi_1(x_1,x_2)\overline{\varphi_2(x_1',x_2')}\,dx_1dx_1'dx_2dx_2'$$

$$= \text{Th.5 公式の右辺} - \frac{2(1-q^{-1})}{\log q}\tan^{-1}\frac{\pi}{(\log q)(\lambda_1+\lambda_2+1)}$$

$$\times\frac{\Gamma(\pi_2\rho^{\frac{1}{2}})}{\Gamma(\pi_1\rho^{\frac{1}{2}})\Gamma((\pi_1\pi_2\rho^{\frac{1}{2}})^{-1})}\int \Phi^1(\omega|\pi_1\pi_2\rho^{\frac{1}{2}})\overline{\Phi^2(\omega|\pi_1\pi\rho^{\frac{1}{2}})}|\omega|^{\lambda_1+\lambda_2+1}\,d\omega$$

以上

注意 最後の項で supplementary series の表現 $\mathcal{R}_{\pi_1\pi_2\rho^{\frac{1}{2}}}$ が与えられている。

文献

[1] Martin, R. P.: Tensor product for $SL_2(k)$, trans. A.M.S., vol. 239 (1978), pp. 197–211.